

80 nalog za 80 let

januar 2026

1. Kateri n -kotnik ima 3080 diagonal?
2. V trikotniku so dolžine stranic v razmerju $1:3:k$ ($a < b < c$). Obseg trikotnika je 160 cm, pri čemer je najdaljša stranica za 20 cm daljša od srednje. Izračunaj dolžino najdaljše stranice. (Urh Matjašič, 4. c)
3. Kmet se ukvarja z rejo kokoši in krav. Koliko več kokoši ima, kot krav, če velja: če vzame tri petine vseh kokoši in tri enajstine krav, imajo skupaj 222 nog; če pa vzame dve tretjini vseh kokoši in eno petino krav, imajo skupaj 224 nog?
4. List papirja format A0 ima ploščino 1 m^2 . Če ga prepognemo, dobimo format A1. Če le tega ponovno prepognemo, dobimo format A2 in tako naprej. Papir formata A8 ima robova dolžine 52 in 74 milimetrov. Koliko meri ploščina papirja formata A80?
5. Dan je polinom $p(x) = 5(x^{20} - 5x^{16} + 7x^{10} - 3x^8 + 2)^4$. Določi stopnjo polinoma, prosti člen in izračunaj vsoto vseh koeficientov.
6. Poenostavi dani izraz do enočlenika: $40 \sin^2 x + 20 \cos(2x) + 60$.
7. Izračunaj (Uršula Podbevšek, 3. f)
$$\left(\frac{1 - \cos^4 x}{\tan^2} \cdot \cos^{-2} x - \cos^2 x \right) \cdot \left(\frac{8}{4} \cdot \frac{160}{4} \right)$$
8. Izračunaj 80-ti člen aritmetičnega zaporedja z diferenco $d = \frac{3}{2}$, katerega 10-ti člen je enak -25 .
9. Koliko različnih 4-mestnih naravnih števil lahko sestavimo iz števk $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, če velja: števke se lahko ponavljajo, število je deljivo s 4, prva števka je liha. (Tim Pirc, 4. c)
10. V razredu je 9 dijakov, od katerih so 4 dekleta in 5 fantov. Učitelj želi izbrati 4 dijake/dijakinje, ki bodo sodelovali v kvizu. Koliko različnih skupin 4 dijakov/dijakinj lahko izbere, če mora skupina vsebovati enako ali več deklet kot fantov, a v skupini ne smejo biti samo dekleta? (Miha Plešnar, 4. c)

1. Število diagonal n -kotnika izračunamo po formuli $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$. Tako rešujemo enačbo $\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 3080$. Gre sicer za kvadratno enačbo, ki jo uredimo in rešujemo z uporabo formule, tokrat pa raje zapišimo kot $n \cdot (n-3) = 2 \cdot 3080$ oziroma $n \cdot (n-3) = 80 \cdot 77$ z očitno rešitvijo $n = 80$. To je tudi edina prava rešitev te kvadratne enačbe, saj mora biti rešitev naravno število.
2. Stranice trikotnika, zaradi danega razmerja, lahko zapišemo $a = x$, $b = 3 \cdot x$, $c = k \cdot x$ in upoštevamo podatke: $x + 3x + kx = 160$ in $kx = 20 + 3x$. Tako smo dobili sistem dveh enačb z dvema neznankama. Enačbi zapišemo v obliko $x \cdot (4 + x) = 160$ in $x \cdot (k - 3) = 20$ in ju delimo. Dobimo enačbo $\frac{4+x}{k-3} = \frac{160}{20}$. Enačba ima rešitev $k = 4$. Izračunamo še $x = 20$ in $c = k \cdot x = 80$ cm.
3. Za lažje računanje označimo število kokoši s $15x$ (ker bomo računali petino in tretjino tega števila, mora biti število kokoši deljivo s 15) in število krav s $55y$ (zaradi podobnega razloga kot prej). Glede na besedilo naloge lahko zapišemo enačbi $\frac{3}{5} \cdot 15x \cdot 2 + \frac{3}{11} \cdot 55y \cdot 4 = 222$ in $\frac{2}{3} \cdot 15x \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 55y \cdot 4 = 224$ (upoštevali smo, da imajo kokoši po 2 nogi, krave pa po 4). Enačbi enostavno uredimo in rešimo sistem in dobimo rešitvi $y = 1$ in $x = 9$. Tako je torej kokoši $9 \cdot 15 = 135$, krav pa $55 \cdot 1 = 55$. Kokoši je torej 80 več kot krav.
4. Pri prepogibanju papirja se ploščina vsakič razpolovi. Papir formata A1 ima torej ploščino $\frac{1}{2} \cdot 1 \text{ m}^2$, papir formata A2 ima ploščino $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 \text{ m}^2$ in ploščino papirja formata A80 lahko zapišemo v obliki $\frac{1}{2^{80}} \text{ m}^2$.
5. Stopnja polinoma je eksponent pri najvišji potenci spremenljivke x , to je pri potenci $(x^{20})^4$, torej je stopnja polinoma $p(x)$ enaka 80. Začetna vrednost polinoma je vrednost $p(0) = 5 \cdot 2^4 = 80$. Vsoto vseh njegovih koeficientov pa dobimo, če izračunamo $p(1)$ in tudi dobimo 80.
6. V prvem koraku upoštevamo formulo za kosinus dvojnega kota in dobimo $40 \sin^2 x + 20 \cos(2x) + 60 = 40 \sin^2 x + 20 \cos^2 x - 20 \sin^2 x + 60 =$
 $20 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) + 60 = 80.$
7. Najprej moramo urediti izraz, nato krajšamo in dobimo
$$\left(\frac{(1 - \cos^2 x) \cdot (1 + \cos^2 x)}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \cos^2 x \right) \cdot 2 \cdot 40 = (1 + \cos^2 x - \cos^2 x) \cdot 80 = 80.$$
8. Ker vemo, da za aritmetično zaporedje velja $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, lahko za naše zaporedje zapišemo $a_{80} = a_1 + 79 \cdot d = a_1 + 9 \cdot d + 70 \cdot d = a_{10} + 70 \cdot d$. Če vstavimo podatke, dobimo rezultat $a_{80} = -25 + 70 \cdot \frac{3}{2} = 80.$
9. Ker mora biti naše štirimestno število deljivo s 4, mora biti dvomestni konec deljiv s štiri. Za dvomestni konec imamo torej 8 možnosti 44, 40, 32, 24, 20, 12, 04, 00. Ker mora biti na prvem mestu liho število sta to le 2 možnosti, na drugem mestu pa katerikoli števili, torej 5 možnosti. Če upoštevamo osnovni izrek kombinatorike (pravilo produkta), je število vseh možnosti torej $2 \cdot 5 \cdot 8 = 80.$

10. Ker mora skupina vsebovati več deklet kot fantov (in ne samo deklet) sta možnosti le dve. V skupini sta 2 dekleti in 2 fanta ali 3 dekleta in 1 fant. V prvem primeru lahko izbor naredimo na $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} = 6 \cdot 10 = 60$ načinov, v drugem primeru pa $\binom{4}{3} \cdot \binom{5}{1} = 4 \cdot 5 = 20$. Vseh možnosti je torej (znova lahko uporabimo osnovni izrek kombinatorike – tokrat pravilo vsote) $60 + 20 = 80$.