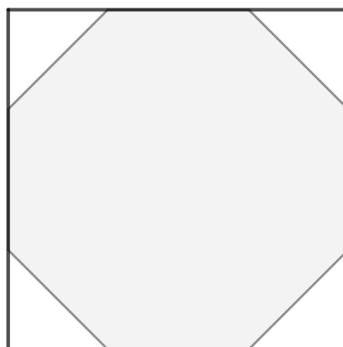


80 nalog za 80 let

december 2025

1. Z Evklidovim algoritmom izračunaj največji skupni delitelj števil 240 in 560.
2. Z razcepom na prafaktorje izračunaj najmanjši skupni večkratnik števil 16, 5 in 10.
3. Koliko naravnih števil med 70 in 550 je deljivih s 6?
4. Reši enačbo $2 \cdot \sqrt{x+1} + 62 = x$.
5. Dana sta kvadratna enačba $2x^2 - 5x - 12 = 0$ in funkcija $f(x) = 3^x - 1$. Kolikšna je vrednost funkcije za tisti x , ki je večja od rešitev kvadratne enačbe?
6. Iz kvadrata s stranico 80: $(\sqrt{2} - 1)$ izrežemo največji pravilni 8-kotnik. Izračunaj njegovo stranico, ne da bi uporabil kalkulator.



7. Na koliko načinov lahko iz črk c, d, e, f, g sestavimo trimestne besede, če se črke lahko ponavljajo, beseda pa se mora začeti in končati s soglasnikom.
8. Izračunaj šesti člen geometrijskega zaporedja, katerega tretji člen je -10 , kvocient pa je enak nenaravnemu rezultatu (rešitvi) enačbe $x^3 - 10x^2 + 11x = -70$. (Peter Planinc, 4. f)
9. Dan je geometrijsko zaporedje, za katerega velja, da sta kvocient in prvi člen enaka. Tretji člen je enak 8. Izračunaj $\left(\frac{a_6}{(a_5)^{-1}} + a_9 - a_5 + a_1\right) \cdot a_{16}$ novega zaporedja, ki ga dobimo, če dano zaporedje logaritmujemo z osnovo 4. (Žan Volčanšek, 4. f)
10. Naj bo $P(n)$ n -to zaporedno praštevilo. Koliko rešitev ima kongruenca $x^{20} \equiv 1 \pmod{(P(13) \cdot 13)}$? (Lovro Ott, 4.a)

1. Izvedemo Evklidov algoritem: $560 = 2 \cdot 240 + 80$ in že v drugem koraku dobimo ostanek 0, saj je $240 = 3 \cdot 80$. Torej je $D(240, 560) = 80$.
2. Razcepi teh števil so: $16 = 2^4$, $5 = 1 \cdot 5$, $10 = 2 \cdot 5$ in zato $v(16, 5, 10) = 2^4 \cdot 5 = 80$.
3. Večkratniki števila 6 na tem intervalu so 72, 78, ..., 546, razlika med njimi je 6. Izračunamo torej $550 - 70 = 480$ in $480 : 6 = 80$. Na tem intervalu je torej 80 večkratnikov števila 6.
4. Dano enačbo $2 \cdot \sqrt{x+1} + 62 = x$ uredimo in kvadriramo in dobimo $4(x+1) = x^2 - 124x + 3844$. Enačbo uredimo $x^2 - 128x + 3840 = 0$ in rešimo z uporabo formule. Rešitvi sta $x_1 = 80$, $x_2 = 48$. Rešitev 48 ne ustreza prvotni enačbi s korenem, zato je edina rešitev enačbe $x_1 = 80$.
5. Dana enačba ima rešitvi (izračunamo s formulo za reševanje kvadratne enačbe) $x_1 = 4$ in $x_2 = -\frac{3}{2}$. Večja od rešitev je torej $x_1 = 4$, kar vstavimo v funkcijski predpis in dobimo $f(4) = 3^4 - 1 = 80$.
6. Na skici označimo stranico kvadrata $a = \frac{80}{\sqrt{2}-1} = 80 \cdot (\sqrt{2} + 1)$ (racionalizirali smo imenovalce). Z x na skici označimo stranico osemkotnika, z y pa delčke na stranici kvadrata, ki niso stranica osemkotnika. Tako velja $x + 2y = a = 80 \cdot (\sqrt{2} + 1)$. Iz enakokrakega pravokotnega trikotnika v vogalu vidimo zvezo $x = y \cdot \sqrt{2}$ oziroma $y = x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$. Če to vstavimo v prvo enačbo dobimo $x + x \cdot \sqrt{2} = 80 \cdot (\sqrt{2} + 1)$ in tako $x = 80$.
7. Sestavljamo trimestne besede, na prvem in zadnjem mestu imamo 4 možnosti (soglasnike, ki se lahko ponavljajo), na sredini pa katerokoli črko, torej 5 možnosti. Vseh besed je tako $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$.
8. Najprej izračunajmo kvocient geometrijskega zaporedja, torej rešimo polinomske enačbo $x^3 - 10x^2 + 11x + 70 = 0$. Kandidate iščemo med delitelji prostega člena (torej števila 70). S Hornerjevim algoritmom ugotovimo, da je rešitev npr. 5. Polinom lahko torej razcepimo $x^3 - 10x^2 + 11x + 70 = (x-5)(x^2 - 5x - 14) = (x-5)(x-7)(x+2)$. Edina rešitev, ki ni naravno število je -2 . Torej je kvocient $q = -2$. Ker je podan tretji člen $a_3 = a_1 \cdot q^2 = -10$, izračunamo $a_1 = -\frac{5}{2}$ in šesti člen $a_6 = 80$.
9. Iščemo geometrijsko zaporedje, kjer velja $b_1 = q$ in $b_3 = b_1 \cdot q^2 = 8$. To pomeni $b_1 = q = 2$. Če to geometrijsko zaporedje logaritmujemo, dobimo aritmetično zaporedje, za katerega velja, da je prvi člen $a_1 = \log_4 b_1 = \frac{1}{2}$ in diferenca je $d = \log_4 b_2 - \log_4 b_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Za izračun danega izraza izračunamo $a_6 = 3$, $a_5 = \frac{5}{2}$, $a_9 = \frac{9}{2}$, $a_{16} = 8$. Izračunamo izraz $\left(\frac{a_6}{(a_5)^{-1}} + a_9 - a_5 + a_1\right) \cdot a_{16} = 80$.
10. Najprej premislimo, da pomeni $P(13)$ trinajsto praštevilo po vrsti, torej $P(13) = 41$. Računamo torej $x^{20} \equiv 1 \pmod{41 \cdot 13}$. Po CTR lahko kongruenco razcepimo na dve, $x^{20} \equiv 1 \pmod{13}$ in $x^{20} \equiv 1 \pmod{41}$. Prva ima rešitev pri $a^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, kjer sta števili a in 13 tuji števili, torej $D(a, 13) = 1$. To sledi po Eulerjevem izreku $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, torej $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, kjer sta a in p tuja. Ostanki pri deljenju s 13 so 0, 1, 2, ..., 12. Tako dobimo multiplikativno

grupo $G = \{g^0, g^1, \dots, g^{11}\}$, kjer je g generator ostankov. Vsak element grupe G ima torej različne ostanke po modulu 13. Po zgornjem izreku je $x^{20} \equiv 1 \pmod{13}$ torej $x^m \equiv 1 \pmod{13}$ natanko tedaj, ko $m \equiv 0 \pmod{12}$. Če je $x \in G$, mora biti $x = g^k$, kjer je $k \equiv 0 \pmod{3}$. Zato za x dobimo štiri rešitve ($D(12, 20) = 4$) to so g^0, g^3, g^6, g^9 . Podobno naredimo za drugo kongruenco in dobimo dvajset rešitev, ker je $D(20, 40) = 20$. Skupaj imamo torej $20 \cdot 4 = 80$ rešitev, ki so medsebojno različne po modulu $P(13) \cdot 13$.