

80 nalog za 80 let

november 2025

(rešitve na drugi strani)

1. Notranji koti trikotnika so v razmerju $1 : 5 : 3$. Izračunaj velikost najmanjšega izmed zunanjih kotov tega trikotnika.
2. Peter je dobil hči Majo, ko je bil star 25 let. Danes je vsota njunih starosti 135 let. Koliko je danes star Peter?
3. V enakostraničnem trikotniku ABC na stranici BC leži točka M tako, da $|BM| : |MC| = 1 : 3$ in skalarni produkt vektorjev $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 5600$. Izračunaj dolžino stranice trikotnika.
4. Reši enačbo: $\log_2 x - \log_2 5 = 2 \cdot \log_4 16$. (Mia Šumi 3. f)
5. Izračunaj: $\frac{(5 \cdot \log_2(1024) + 3) \cdot \log_{10}(1000) + 1}{\log_2 4}$. (Lara Loboda, 3. f)
6. Zapiši kvadratno enačbo, da bo vsota njenih rešitev 80. Ali je takih enačb več?
7. Poišči največje število, ki ustreza enačbi $x^3 - 81x^2 + 78x + 160 = 0$.
8. Poenostavi izraz : $(x - 1)^6 - (x^2)^3 + 6x^2 \cdot x^3 + 20x^3 - x^2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 15 + 6x + 79$.
9. Reši enačbo: $V_n^2 - 78n = \frac{P_6}{9}$.
10. Na tekmovanju iz logike je tekmovalo 6 ljudi, od tega 2 moška, od žensk je ena polovica dijakinj Gimnazije Šentvid. Koliko možnih razvrstitev za priznanja je, če priznanja za dosego rezultata dobijo prvi trije, za katere vemo, da je zmagala dijakinja Gimnazije Šentvid, dodatno ločeno priznanje pa dobi eden izmed moških za rešitev dodatne naloge? (Peter Planic, 4. f)

REŠITVE november 2025

1. Zaradi podanega razmerja označimo $\alpha = x, \beta = 5x, \gamma = 3x$. Ker je vsota notranjih kotov v trikotniku 180° , izračunamo $x = 20^\circ$. Najmanjši izmed zunanjih kotov leži ob največjem notranjem kotu, torej je to kot β' . Torej $\beta' = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.
2. Če z x označimo današnjo Majino starost, je Peter star $25 + x$ in velja $x + (x + 25) = 135$. Torej $x = 55$ in Petrova starost je **80 let**.
3. Če označimo (narišite skico enakostraničnega trikotnika) vektorje $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$, lahko dano enačbo zapišemo $\vec{a} \cdot \left(\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right) = 5600$. Razrešimo oklepaje in upoštevamo definicijo skalarnega produkta, da dobimo $|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = 5600$ in $|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 5600$. Izračunamo $|\vec{a}| = 80$.
4. Enačbo poenostavimo $\log_2 \frac{x}{5} = 2 \cdot 2$ in izračunamo $\frac{x}{5} = 2^4$, kar pomeni **$x = 80$** .
5. Poenostavimo izraz in dobimo $\frac{(5 \cdot 10 + 3) \cdot 3 + 1}{2} = 80$.
6. Če kvadratno enačbo z rešitvama a, b zapišemo $(x - a)(x - b) = 0$, velja $x^2 - (a + b)x + ab = 0$. Če je vsota rešitev kvadratne enačbe 80, mora biti torej srednji člen $-80x$, torej je iskana enačba npr. $x^2 - 80x + 1500 = 0$. Rešitev je torej neskončno.
7. Cele rešitve polinomske enačbe iščem med delitelji prostega člena (torej števila 160). S Hornerjevim algoritmom preverimo npr. število 80 in izkaže se, da je to ena od rešitev enačbe. Polinom lahko še razcepimo in dobimo $(x - 80)(x - 2)(x + 1) = 0$. Drugi dve rešitvi sta torej 2 in -1 . Število **80** je očitno največja rešitev te enačbe.
8. Prvi člen danega izraza zapišemo z binomskim izrekom, ostale člene poenostavimo in dobimo $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 - x^6 + 6x^5 + 20x^3 - 15x^4 - 15x^2 + 6x + 79$. Skoraj vsi členi se odštejejo, rezultat je **80**.
9. Upoštevajmo definicije zapisanih simbolov in dobimo enačbo $n(n - 1) - 78n = \frac{6!}{9}$, oziroma $n^2 - n - 78n = 80$. Kvadratna enačba ima sicer dve rešitvi, a število -1 ni ustrezno. Edina rešitev enačbe je tako število **80**.
10. Med tekmovalci sta torej 2 moška, 2 ženski, ki sta dijakinji Gimnazije Šentvid, in še dve drugi ženski. Priznanja za prva tri mesta lahko podelimo na $2 \cdot 5 \cdot 4$ načinov. Ker hkrati podelimo še posebno (ločeno) priznanje, je število vseh možnosti $(2 \cdot 5 \cdot 4) \cdot 2 = 80$.